MAI 3 2. cvičení - metrické prostory 2

Navíc k problémkům z minulého cvičení:

1. a) Ukažte, že konvergence v prostoru R^n s metrikami $d_p(x,y), p \in N$ i $d_\infty(x,y)$ je konvergence „po složkách".
   b) Ukažte, že metriky (v prostoru R^n) $d_1(x,y)$, $d_2(x,y)$ $d_\infty(x,y)$ jsou ekvivalentní.

2. a) Promyslete, co „znamená" v prostoru $C[a,b]$ (prostor funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $[a,b]$) s metrikou $d_{\max}(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ konvergence posloupnosti $\{f_n\}$.
   (Platí : $\lim f_n = f$ v $C[a,b] \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] : \lim f_n(x) = f(x)$?)
   b) Jak „vypadá" koule v prostoru ($C[a,b], d_{\max}$) ?

3. Buď M množina všech omezených posloupností $x = \{x_n\}$ reálných čísel. Je-li $x, y \in M$, ukažte, že $d(x,y) = \sup_{n\in N} |x_n - y_n|$ je metrika v M (užívá se označení (l_∞, d_∞)).
   Co zde znamená $\lim x^{(k)} = x$?

4. Ukažte, že platí:
   Je-li posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in R^n$ cauchyovská v (R^n, d_1) (resp. v (R^n, d_2), tesp. v (R^n, d_∞)), pak je konvergentní. (V libovolném metrickém prostoru platí: $\{x_n\}$ je konvergentní $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ je cauchyovská.

5. Buď (M,d) metrický prostor, $\{x_n\}$, $\{x_n^*\}$, $\{y_n\}$, $\{y_n^*\}$ posloupnosti v (M,d). Dokažte (nebo ukažte, že neplatí):
   a) $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y \Rightarrow \lim d(x_n, y_n) = d(x,y)$.
   b) Jsou-li posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ cauchyovské, je posloupnost $\{d(x_n, y_n)\}$ konvergentní.
   c) Nechť jsou posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ cauchyovské a pro posloupnosti $\{x_n^*\}$, $\{y_n^*\}$ platí $\lim d(x_n, x_n^*) = 0$ a $\lim d(y_n, y_n^*) = 0$. Pak i posloupnosti $\{x_n^*\}$, $\{y_n^*\}$ jsou cauchyovské a $\lim d(x_n, y_n) = \lim d(x_n^*, y_n^*)$.
   d) Ukažte, že relace $\{x_n\}$ $\{x_n^*\}$, když $\lim d(x_n, x_n^*) = 0$ je ekvivalence v množině posloupností v prostoru (M,d).

6. Zopakujte si pojmy množina otevřená, uzavřená v (M,d) ((M,d) - metrický prostor), uzávěr množiny, vnitřní bod, hraniční bod hromadný bod množiny.
   Ukažte:
   a) $X \subset (M,d)$ je uzavřená množina $\Leftrightarrow$ $M - X$ je množina otevřená.
   b) $a \in M$ je hromadný bod množiny X $\Leftrightarrow$ pro každou kouli $B(a,r)$ je množina $B(a,r) \cap X$ nekonečná.
   c) $a \in M$ je hromadný bod množiny X, $a \notin X$ $\Rightarrow$ a je hraničním bodem množiny X.
   d) je-li a je hraničním bodem množiny X, musí být hromadným bodem množiny X ?

7. Rozhodněte, zda platí tvrzení (buď dokažte, že platí, nebo pomocí příkladu ukažte, že tvrzení neplatí):

   a) sjednocení spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   b) průnik spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   c) sjednocení spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina;
   d) průnik spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.